ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1979

OPTION M'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

Dans tout le problème, f désigne une application continue de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels dans lui-même, et qui admet 2π pour période ; on pose $\| f \| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$.

La partie III est indépendante des deux autres, sauf pour l'énoncé des hypothèses imposées à f.

I

1 - a) Soient $r \in [0, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Etablir les égalités

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

et

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\, dt}{1 - 2r\cos(t-x) + r^2} .$$

b) On pose, pour $r \in [0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\, f(t)\, dt}{1 - 2r\cos(t-x) + r^2} .$$

Montrer que

$$F(x, r) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

où, pour tout entier $n \geqslant 0$, a_n et b_n désignent les intégrales

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt .$$

.../...

-2-

Pour $\eta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ établir l'égalité

$$F(x,r) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\eta}^{x+\eta} \frac{(1-r^2)\ (f(t)-f(x))}{1-2r\cos(t-x)+r^2} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{x+\eta}^{x+2\pi-\eta} \frac{(1-r^2)\ (f(t)-f(x))}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\ dt$$

et en déduire, l'inégalité

$$|F(x,r) - f(x)| \leq \sup_{|t-x| \leq \eta} |f(t) - f(x)| + 2\frac{1-r^2}{1-\cos\eta} \|f\|$$

Montrer que lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures $F(x,r)$ tend vers $f(x)$ uniformément par rapport à x sur $\mathbb{R}$.

2 - Pour $r \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x,r) = \text{Arctg}\ \frac{r\sin x}{1-r\cos x}\ .$$

Montrer que la dérivée partielle φ'_x de φ par rapport à x vérifie

$$\varphi'_x(x,r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nx$$

et en déduire les égalités

$$\varphi(x,r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin nx}{n}$$

et

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x,r)\ f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n b_n}{n}\ .$$

.../...

-3-

3 - a) Pour $x \in]0, 2\pi[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, établir l'égalité

$$\frac{\pi - x}{2} = \operatorname{Arctg} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

et l'inégalité

$$|\operatorname{Arctg} a - \operatorname{Arctg} b| \leqslant |a - b| \ .$$

En déduire, pour $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ et $r \in [0, 1[$, l'inégalité

$$|\varphi(x, r) - \frac{\pi - x}{2}| \leqslant \frac{1 - r}{(1 - \cos \delta)^2} \ .$$

b) Montrer que lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures, x appartenant à $]0, 2\pi[$, $\varphi(x, r)$ tend vers $\frac{\pi - x}{2}$, la convergence étant en outre uniforme par rapport à x sur tout intervalle fermé inclus dans $]0, 2\pi[$.

En déduire que

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x, r) \, f(x) \, dx\right] = \frac{\pi a_0}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \, f(x) \, dx \ .$$

II

On suppose dans cette partie que g est une application décroissante de l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs dans lui-même, deux fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $g(0) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$ soit convergente. En outre, on suppose qu'il existe un réel strictement positif x_0 tel que la dérivée g' de g soit décroissante sur $[0, x_0]$ et croissante sur $[x_0, +\infty[$. Enfin, λ désigne un réel strictement positif.

1 - Montrer que g' a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et calculer cette limite.

2 - a) Etablir la convergence des intégrales

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x) \cos x \, dx \qquad \text{et} \qquad H(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x) \sin x \, dx$$

.../...

et les égalités

$$G(\lambda) = -\lambda\, g'(0) - \lambda^2 \int_0^{+\infty} g''(\lambda x) \cos x \, dx \quad \text{et} \quad H(\lambda) = 1 - \lambda^2 \int_0^{+\infty} g''(\lambda x) \sin x \, dx$$

b) En déduire les inégalités

$$|G(\lambda)| \leqslant A\lambda \quad \text{et} \quad |H(\lambda) - 1| \leqslant A\lambda \,, \quad \text{avec} \quad A = -2\, g'(x_0)$$

c) Pour tout entier $n \geqslant 1$, établir la convergence des intégrales

$$I(\lambda, n) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x) \cos n x \, dx \quad \text{et} \quad J(\lambda, n) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x) \sin n x \, dx$$

et les égalités

$$I(\lambda, n) = \frac{1}{n} G\left(\frac{\lambda}{n}\right) \quad \text{et} \quad J(\lambda, n) = \frac{1}{n} H\left(\frac{\lambda}{n}\right) .$$

En déduire les inégalités

$$|I(\lambda, n)| \leqslant \frac{A\lambda}{n^2} \quad \text{et} \quad \left|J(\lambda, n) - \frac{1}{n}\right| \leqslant \frac{A\lambda}{n^2} .$$

3 - a) Soit $r \in [0, 1[$. Etablir la convergence des intégrales

$$\psi(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x)\, f(x) \, dx \quad \text{et} \quad \Phi(\lambda, r) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x)\, F(x, r) \, dx$$

et l'inégalité

$$|\Phi(\lambda, r) - \psi(\lambda)| \leqslant \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} g(x) \, dx\right) \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x, r) - f(x)| \,.$$

En déduire la limite de $\Phi(\lambda, r)$ lorsque r tend vers 1 par valeurs inférieures, λ étant fixé.

b) On rappelle, sans en demander la démonstration, l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Etablir l'inégalité

$$\left|\Phi(\lambda, r) - \frac{a_0}{2\lambda} \int_0^{+\infty} g(x) \, dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(x, r)\, f(x) \, dx\right| \leqslant \frac{2 A \lambda \pi^2}{3} \|f\| \,;$$

.../...

en déduire l'inégalité

$$\left| \psi(\lambda) - \frac{a_0}{2\lambda} \int_0^{+\infty} g(x)\, dx - \frac{\pi a_0}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\, f(x)\, dx \right| \leqslant \frac{2A\lambda\pi^2}{3} \|f\| ,$$

et (en distinguant les cas $a_0 \neq 0$ et $a_0 = 0$) la limite de $\psi(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0.

4 - On suppose de plus dans cette question que pour tout x réel, $f(x + \pi) = -f(x)$. Montrer que

$$\lim_{\lambda \to 0} \psi(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x)\, dx .$$

III

On suppose dans cette partie que f vérifie l'hypothèse donnée en II,4 et que g est une application décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, une fois continuement dérivable sur $\mathbb{R}_+$, telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et que de plus, pour tout $y \in]0, +\infty[$, la fonction $x \longmapsto h_y(x) = g(x) - g(x + y)$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, λ désigne encore un réel strictement positif.

1 - a) Montrer que pour tout couple (a, b) de réels, on a

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \pi \|f\| .$$

b) Etablir la convergence de l'intégrale

$$\psi(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(\lambda x)\, f(x)\, dx$$

2 - a) Montrer que

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} g(\lambda x)\, f(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} h_{\pi\lambda}(\lambda x)\, f(x)\, dx .$$

b) Démontrer l'inégalité

$$\left| \int_0^{+\infty} h_{\pi\lambda}(\lambda x)\, f(x)\, dx \right| \leqslant \pi\, h_{\pi\lambda}(0)\, \|f\| .$$

c) Montrer que $\lim_{\lambda \to 0} \psi(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail